



TITLE:

# 固体境界を有する渦崩壊流れの大域的安定性について (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

京藤, 敏達

---

CITATION:

京藤, 敏達. 固体境界を有する渦崩壊流れの大域的安定性について (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2017, 2034: 1-15

ISSUE DATE:

2017-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/236785>

RIGHT:

# 固体境界を有する渦崩壊流れの大域的安定性について

筑波大学システム情報系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH\*)

\* Corresponding author: kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp

2016 年 10 月

## 概要

流れの安定性理論は、主に一様流もしくは漸変流に対して適用され、近年は絶対安定性と移流安定性の概念を用いることにより、空間非一様な現象の解明にも有効であることが示された。特に渦崩壊現象に関しては、一様流の主流が後流の場合には絶対不安定性によりスパイラル型の渦崩壊が発生するが示されている。ここでは、固体境界に沿う急変流の安定性を調べる手順について、軸対称渦崩壊流れのスパイラル型への遷移を対象に議論する。

線形安定性理論で現れる固有値問題は、離散化及び境界条件の影響を受け、物理的に意味のある固有値が得られているかどうかについても注意を要する。そこで、軸対称非粘性定常流の渦崩壊淀み点近傍の解を求め、この定常解について時間に関する線形安定解析を行う。この淀み点近傍の解は、物理的には淀み点近傍でのみ成立するが、適用領域を固体境界まで延長することで、固体境界を有する渦崩壊流れの解として用いる。このような簡単な解を解析対象とすることで、非一様流の線形安定解析の問題点を整理し、流れの安定解析方法の手順を整理する。

## 目次

1 はじめに	2
2 旋回流ジェットの流れ場の基礎方程式	2
2.1 軸対称渦あり流れ	3
2.1.1 自由表面周りの級数解	4
2.1.2 定常流の流出部漸近解	6
2.1.3 定常流の数値計算	7
2.2 定常解の安定性—非定常運動への拡張	10
2.2.1 基礎方程式	10
2.2.2 $r = 0$ ( $s = 0, \Phi < 0$ ) における方程式	12
2.2.3 自由表面の境界条件	12
2.2.4 擾乱方程式の解法	13
2.2.5 流れ方向の境界条件	14
3 まとめ	15

## 1 はじめに

旋回型微細気泡発生ノズルは、旋回流ベーンと縮流部および急拡部からなり、ノズル中心に形成された渦核はノズル前面の急拡部に張り付く形で歳差運動を行う [8] (図 1 参照)。この渦核の変形は渦崩壊 [7] として知られているが、その発生メカニズムや歳差運動の周波数予測は未解明である。歳差運動に関しては、無限に長い円筒内に軸方向流を持つ渦核が存在する場合について、helical waves の変形から歳差運動を説明する試みがなされている [5, 6, 10]。彼らの解析では、ビオ・サバールの法則を用いているため、無限遠方で接続する渦糸の運動を解析していることになる。一方で、本微細気泡発生ノズルで形成される渦は、旋回流ベーンにより生成されるため、固体壁面上に一端を有しノズル出口でスパイラル状となり放射方向に発散する [9]。したがって、ビオ・サバールの法則をベースとした解析では、この現象を取り扱うことはできない。

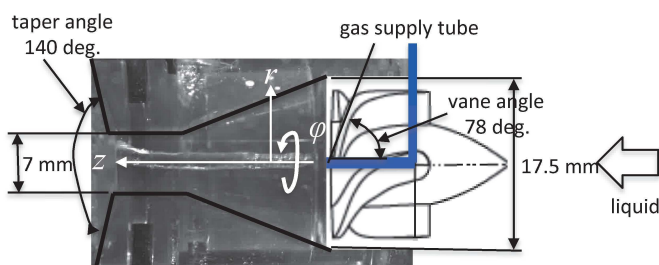


図 1: Swirling-type micro-bubble nozzle

Benjamin は渦崩壊は超臨界から亜臨界に至る流れであり、エネルギー損失を伴うとした [1]。一方、Keller J. J. ら [2, 3] は、エネルギー損失の無い渦崩壊が存在することを示し、渦崩壊後は dead water 領域が形成されるとして渦崩壊のモデル化を行った。本研究で対象とする微細気泡発生ノズルは、旋回流が強く流れの全域が亜臨界の場合にも渦崩壊が発生するように設計されており、Benjamin の渦崩壊の定義は当てはまらない。すなわち、本ノズルでは、ノズル出口の曲率をコアンダ効果が発現するように設計されており、いわゆる「コアンダ効果により誘起された渦崩壊」となる。以上のことから、本研究では、Keller J. J. ら [2, 3] の渦崩壊の理論に沿って解析を行う。

本論文の構成は以下の通りである。第 2.1 節では、旋回流ジェットの開き角が 180 度以上の場合にも Bragg and Hawthorne 方程式 (B-H 方程式) の解が構成できるように、流線と流線に直交する座標系を導入する。第 2.1.2 節では、B-H 方程式の漸近解を求め、第 2.1.2 節で定常流の解を求める際の流出側境界条件を導く。第 2.2 節では、定常流の線形安定性を調べるための擾乱の支配方程式および境界条件を導く。

## 2 旋回流ジェットの流れ場の基礎方程式

旋回型微細気泡発生ノズルでは、スワール数もしくは Squire 数がノズル内の全域 (縮流部を含む) で十分大きく、亜臨界状態であっても渦崩壊が発生する。この意味で、旋回型微細気泡発生用ノズルにおける渦崩壊は、Keller J. J. ら [2, 3] が提案したモデルで説明することができる。また、微

細気泡発生効率、ノズル出口のテーパ角が大きい、換言すると、旋回流ジェットの屈曲角が大きいほど微細気泡発生効率が上がることがわかっている。

## 2.1 軸対称渦あり流れ

Keller J. J. らにしたがって、支配方程式は、無次元化された非粘性軸対称定常流の渦度保存則 (B-H 方程式)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = F, \quad F \equiv r^2 \frac{dH}{d\Psi} - C \frac{dC}{d\Psi} \quad (1)$$

を用いる (Bragg and Hawthorne (1950)). ただし,

$$ru = C(\Psi), \quad v = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{r \partial z}, \quad w = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (2)$$

ここで、 $\Psi$  は流れ関数、 $z$  は軸対称軸、 $r$  は  $z$  軸に直交する半径方向距離、 $u, v, w$  はそれぞれ  $z$  軸周り、 $r$  方向、 $z$  方向の流速、 $H(\Psi)$  はベルヌーイ定数、 $C(\Psi)$  および  $H(\Psi)$  は流線上で一定であり、境界を通過する流線については境界条件から決定される。また、 $z, r$  はノズル出口の半径  $R$ 、 $\psi$  は  $\psi_f \equiv WR^2/2$ 、 $H$  は  $\psi_f^2/R^4$ 、 $C$  は  $R\psi_f$  で無次元化されている。結果的に、固体渦の場合には、 $F = 4S_q^2(r^2 - \Psi)$ 、 $S_q = R\Omega/W$  となる。ここで、 $\Omega$  は固体渦の角速度、 $S_q$  はスワールパラメータである。式 (2) の  $v, w$  において、係数が  $1/2$  となっているのは、流速を  $W$ 、流れ関数を  $\psi_f$  で無次元化したことによる。さらに、Rankine 渦の支配方程式は、渦核の外で  $S_q = 0$  とおくことで表現される。

漸拡する管路における渦崩壊の近似解を求めるために、流れ関数の  $z$  方向の変化率が  $r$  方向の変化率に比べて無視できると仮定する。このとき、B-H 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Psi}{r \partial r} + 4S_q^2(\Psi - r^2) = 0 \quad (3)$$

となり、一般解は Bessel 関数を用いて表すことができる。管路の半径を  $r_b$ 、渦核の半径を  $r_c$ 、渦あり渦なしの境界面を  $r = r_i$ 、空洞半径を  $r_a$  とおくと、境界条件は流量の連続性より

$$\Psi_{rot}(r_a) = 0, \quad \Psi_{rot}(r_i) = r_c^2, \quad (4)$$

$$\Psi_{irrot}(r_b) = 1, \quad \Psi_{irrot}(r_i) = r_c^2, \quad (5)$$

となり、上記の境界条件を満たす解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Psi_{rot} = r^2 + \frac{r}{r_i} \frac{(r_c^2 - r_i^2)N_1(2r_a\bar{S}_q) + r_ar_iN_1(2r_i\bar{S}_q)}{J_1(2r_i\bar{S}_q)N_1(2r_a\bar{S}_q) - J_1(2r_a\bar{S}_q)N_1(2r_i\bar{S}_q)} J_1(2r\bar{S}_q) \\ - \frac{r}{r_i} \frac{(r_c^2 - r_i^2)J_1(2r_a\bar{S}_q) + r_ar_iJ_1(2r_i\bar{S}_q)}{J_1(2r_i\bar{S}_q)N_1(2r_a\bar{S}_q) - J_1(2r_a\bar{S}_q)N_1(2r_i\bar{S}_q)} N_1(2r\bar{S}_q), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Psi_{irrot} = \frac{r_b^2r_c^2 - r_i^2 + (1 - r_c^2)r^2}{r_b^2 - r_i^2}, \quad (7)$$

ここで、下付き添字の 'rot' および 'irrot' は、それぞれ渦あり、渦なし流れの解を表す。自由表面の半径  $r_a$ 、渦度の不連続面の半径  $r_i$  は、Keller にしたがって、流速の連続条件 (natural boundary condition)

$$\left. \frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial r} \right|_{r=r_a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial r} \right|_{r=r_i} = \left. \frac{\partial \Psi_{irrot}}{r \partial r} \right|_{r=r_i} \quad (8)$$

から決定される。非定常運動の場合には、界面における圧力の連続条件で置き換える必要がある。

以上の解から、 $r_c$ ,  $r_b$  を与えて  $r_i$  および  $r_a$  を求めれば、局所的な流速場が計算される。Batchelor にしたがって、 $r_b$  が  $z$  の弱い関数であるとすれば、漸拡管路における渦崩壊の解が得られる。本研究では、管路出口がテーパー状のときの渦崩壊を解析するために、管路半径を

$$r_b = 1 + B_s \{1 + \tanh(\delta_s z)\} + \frac{B}{\delta} [\delta z + \log\{2 \cosh(\delta z)\}] \quad (9)$$

で与える。この関数は、

$$r_b = 1 + 2B_s + 2Bz \quad \text{as } z \rightarrow +\infty, \quad r_b = 1 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \quad (10)$$

を満たす。上記のパラメータ  $B$ ,  $B_s$ ,  $\delta$  および  $\delta_s$  を連続的に変化させることで、テーパーを有しない解をニュートン・ラプソン法の初期値とすれば、テーパーを有する解を解析接続により求めることが可能となる。

さて、 $r_b = 1$  で supercritical な Rankine 渦は、管路が漸拡すると管軸上に淀み点を持ち、その後 hollow core vortex となる。 $r_b = 1$  から淀み点までの解は、式 (6), (7) および (8) において  $r_a \rightarrow 0$  とすることで得られる。式 (6) は、

$$\Psi_{rot,up} = r^2 + (r_c^2 - r_i^2) \frac{r J_1(2\bar{S}_q r)}{r_i J_1(2\bar{S}_q r_i)} \quad (11)$$

となり、淀み点が現れる条件は

$$\left. \frac{\partial \Psi_{rot,up}}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} = 2 + 2\bar{S}_q \frac{r_c^2 - r_i^2}{r_i J_1(2\bar{S}_q r_i)} = 0, \quad \bar{S}_q = \frac{S_q}{r_c} \quad (12)$$

となる。上式と式 (8) の第 2 式を満たす  $r_b$  を与える  $z$  で淀み点が生じる。淀み点が生じると、それより下流では hollow core vortex となるため、 $r_a \neq 0$  の解から渦崩壊の解が構成される。

まず、淀み点における解の特性を見るために、 $S_q$  と  $r_i$  の関係式 (12) をプロットすると、淀み点では  $r_i/r_c > 1$  であるため、渦崩壊の解を構成するためには、 $S_q < 1.9$  が必要であることがわかる。次に、natural boundary condition:

$$\left. \frac{\partial \Psi_{rot,up}}{\partial r} \right|_{r=r_i} = \left. \frac{\partial \Psi_{irrot,up}}{\partial r} \right|_{r=r_i} \quad (13)$$

から、 $r_i, r_b$  を  $r_c$  の関数として求める。

平行管路において以上の解をニュートン・ラプソン法の初期値として用いることで収束性を担保し、管壁がテーパーとなるパラメータ  $B$  を 0 から増加させることで、急拡管路の渦崩壊の解を求めることができる。ただ、テーパー管の場合には  $z \rightarrow \infty$  における厳密解が得られないという問題があり、境界条件についての検討が必要となる。図 2 は、上記の方法に従って計算した定常渦崩壊の解を示す。

### 2.1.1 自由表面周りの級数解

自由表面近傍の解を級数展開により求める。

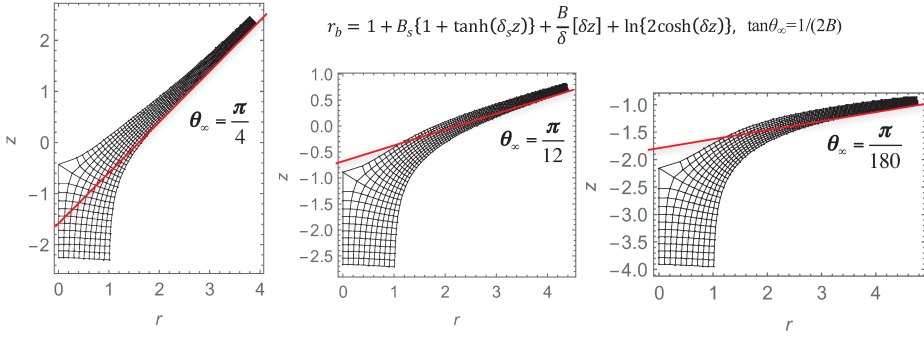


図 2: Steady vortex-breakdown solutions with different taper angles for  $S_q = 1$ .

自由表面近傍の流れ関数  $\Psi$  を  $z - z_F$  の冪級数で展開すると

$$\Psi = y \eta^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \eta^n, \quad \eta \equiv z - z_F(y), \quad y \equiv \frac{r^2}{2} \quad (14)$$

となる。ここで、自由表面は流線であり、また流速が0であることから、 $\Psi$  は  $\eta$  の二次のオーダーを持つ。上式の係数  $a_n(y)$  を求めるため、B-H 方程式 (1) に変数変換  $\eta = z - z_F(y)$  を行い、変数を  $z$  から  $\eta$  に変換すると

$$\left\{ 1 + 2y \left( \frac{dz_F}{dy} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - 4y \frac{dz_F}{dy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial \eta} - 2y \frac{d^2 z_F}{dy^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + 2y \frac{\partial \Psi}{\partial y^2} + 4\bar{S}_q^2 \Psi - 8\bar{S}_q^2 y = 0 \quad (15)$$

となる。上式に (19) を代入し  $\eta$  の冪でまとめ各冪の係数を0とおくと、 $a_n$  の再帰関係式は次式で与えられる。

$$a_0 = \frac{4\bar{S}_q^2}{1 + 2y \left( \frac{dz_F}{dy} \right)^2}, \quad (16)$$

$$a_1 = \frac{2 \left\{ \left( 2 \frac{dz_F}{dy} + y \frac{d^2 z_F}{dy^2} \right) a_0 + 2y \frac{dz_F}{dy} \frac{da_0}{dy} \right\}}{3 \left\{ 1 + 2y \left( \frac{dz_F}{dy} \right)^2 \right\}}, \quad (17)$$

$$a_n = \left\{ -4\bar{S}_q^2 a_{n-2} - 4 \frac{da_{n-2}}{dy} - 2y \frac{d^2 a_{n-2}}{dy^2} + 2(n+1) \left( 2 \frac{dz_F}{dy} + y \frac{d^2 z_F}{dy^2} \right) a_{n-1} + 4(n+1)y \frac{dz_F}{dy} \frac{da_{n-1}}{dy} \right\} / \left\{ (n^2 + 3n + 2) \left\{ 1 + 2y \left( \frac{dz_F}{dy} \right)^2 \right\} \right\}. \quad (18)$$

上式から、すべての  $a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  は  $dz_F/dy$  およびその高階の微係数のみで決定されることがわかる。ただ、淀み点周りの解が自由表面形状  $z = z_F(y)$  のみで決定されるためには、 $z_F(y)$  がす

すべての  $y \geq 0$  に対して  $C^\infty$  となる必要がある。実際、本研究で対象とする自由表面は、滑らかであり、かつ、固体境界と接していないため、 $z_F(y) \in C^\infty$  at  $y = 0$  が成立すると考えられる。

式 (19) の最低次の近似式は、 $c$  を定数として

$$\Psi = cr^2 z^2 \quad (19)$$

とおくことができる。一方で、固体渦では、 $C(\Psi) = ru = S_q \Psi$  より、式 (2) を考慮すると

$$u = cS_q z^2 r, \quad v = -czr, \quad w = cx^2 \quad (20)$$

となる。例えば、固体壁が  $r = 1, z = -2$  を通過するとすれば、固体壁上で  $\Psi = 1$  より、 $c = 1/4$  となる。当然、この漸近解は淀み点近傍でのみで成立するものであるが、線形安定性を議論する際には、擾乱方程式の解析的構造についての議論が幾分容易となる。

### 2.1.2 定常流の流出部漸近解

数値計算では無限領域を扱うことはできない。そこで、円錐状に広がる壁面上の自由境界流れの解を解析的に求める。本節では、先ず簡単のために、剛体回転の渦について議論する。

流出側境界は式 (10) で与えられる。方程式 (1) の漸近解を求めるために、図 3 のように境界接線方向に  $\ell$  座標、法線方向に  $n$  座標を取ると、

$$r = r_b(\ell) - n \sin \alpha, \quad z = z_b(\ell) + n \cos \alpha, \quad r_b(\ell) = \ell \cos \alpha, \quad z_b(\ell) = \ell \sin \alpha - \frac{1 + 2B_s}{2B}, \quad (21)$$

となる。上記の座標変換  $(r, z) \rightarrow (n, \ell)$  により、方程式 (1) は

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ell^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} - \frac{1}{\ell \cos \alpha - n \sin \alpha} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \ell} \cos \alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial n} \sin \alpha \right) - 4\tilde{S}_q^2 \{ (\ell \cos \alpha - n \sin \alpha)^2 - 4 \} = 0 \quad (22)$$

に変換される。境界条件は、

$$\Psi(\ell, 0) = 1, \quad \Psi(\ell_F, n) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}(\ell_F, n) = 0 \quad (23)$$

である。ここで、 $n = n_F$  は自由表面を表す。

さて、 $r \rightarrow \infty$  における解が、 $\ell$  方向に緩やかに変化し、 $n$  方向に急激に変化するとすれば、

$$\Psi(\ell, n) = \Psi_0(\epsilon \ell, n/\epsilon) + \epsilon^2 \Psi_2(\epsilon \ell, n/\epsilon) + \dots, \quad n_F = n_{F0} + \epsilon^2 n_{F2} + \dots, \quad (24)$$

とおくことができる。ここで、 $\epsilon$  は摂動パラメータで微量を表す。式 (24) を式 (1) に代入し、 $\epsilon$  の冪乗の項で整理すると、

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial n^2} - 4\tilde{S}_q^2 \ell^2 \cos^2 \alpha = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial n^2} + \frac{\sin \alpha}{\ell \cos \alpha} \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} + 4\tilde{S}_q^2 (\Psi_0 + 2\ell n \cos \alpha \sin \alpha) = 0 \quad (26)$$

となる。上記の近似は  $\ell \cos \alpha \gg n \sin \alpha$  の下で成立し、 $\alpha \simeq \pi/2$  の場合には適用されないことに注意する。また、境界条件は式 (23) より

$$\Psi_0(\ell, 0) = 1, \quad \Psi_0(\ell, n_{F0}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}(\ell, n_{F0}) = 0, \quad (27)$$

$$\Psi_2(\ell, 0) = 0,$$

$$\Psi_2(\ell, n_{F0}) + n_{F2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}(\ell, n_{F0}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial n}(\ell, n_{F0}) + n_{F2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial n^2}(\ell, n_{F0}) = 0 \quad (28)$$

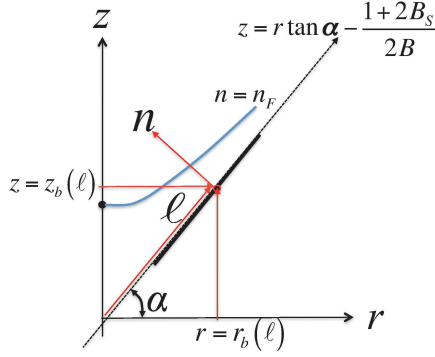


図 3: Local coordinates in  $\ell$ - $n$  plane

となる。以上の式 (25)–(28) の解は、次式で与えられる。

$$\Psi_0(\ell, n) = 1 - 2\sqrt{2}\tilde{S}_q n \ell \cos \alpha + 2\tilde{S}_q^2 n^2 \ell^2 \cos^2 \alpha, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\ell, n) = \frac{\sqrt{2}\tilde{S}_q n}{2\ell} \sec \alpha + \tilde{S}_q n^2 (-2\tilde{S}_q + \sqrt{2} \sin \alpha) \\ + \frac{\sqrt{2}}{3} \tilde{S}_q^2 n^2 \ell (4\tilde{S}_q - 3\sqrt{2} \sin \alpha) \cos \alpha - \frac{2}{3} \tilde{S}_q^4 n^4 \ell^2 \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (30)$$

$$n_{F0} = \frac{\sqrt{2} \sec \alpha}{2\tilde{S}_q \ell}, \quad (31)$$

$$n_{F2} = \frac{(\sqrt{2}\tilde{S}_q + 6 \sin \alpha) \sec^3 \alpha}{24\tilde{S}_q^2 \ell^3}. \quad (32)$$

上記の解は、 $\alpha \rightarrow \pi/2$  では発散するため近似解とはならない。この解の適用範囲を、微分方程式の誤差および  $\alpha = \pi/2$  のときの厳密解と比較することで同定する。図 4(a) は、 $\epsilon$  の 2 次まで考慮した近似解を基礎方程式 (1) に代入し、方程式中の主要項  $\partial^2 \Psi / \partial n^2$  で割ることで定義した誤差を示す。 $r_b > 2$  で誤差は、1% 以下となる。また、hollow core の半径  $r_a$  も  $r_b \geq 1.5$  で、一様流の解にほぼ一致することがわかる。以上の結果より、ここで求めた漸近解は、 $\alpha < 7\pi/16$  の広い範囲で適用可能であると考えられる。

### 2.1.3 定常流の数値計算

Keller J. J. らは、自由境界値問題を簡易に処理するために、未知関数  $\Psi$  を変数とする座標変換 ( $r = r(z, \Psi)$ ) を行って、B-H 方程式を数值的に解いた。本研究では、屈曲角  $\theta$  が 90 度を超える場合も扱うため、 $\Psi = \text{const.}$  に直交する座標系  $\Phi = \text{const.}$  を次式

$$\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (33)$$

を満たすように導入し、さらに  $\Psi, \Phi$  を独立変数として解析を行う。ここで、 $\Lambda$  はスケールファクターであり、B-H 方程式 (1) を満たすように決定される。変数変換  $(r, z) \rightarrow (\Psi, \Phi)$  を行くと、式 (33) は

$$\Lambda \frac{\partial z}{\partial \Psi} + \frac{\partial r}{\partial \Phi} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial r}{\partial \Psi} - \frac{\partial z}{\partial \Phi} = 0 \quad (34)$$



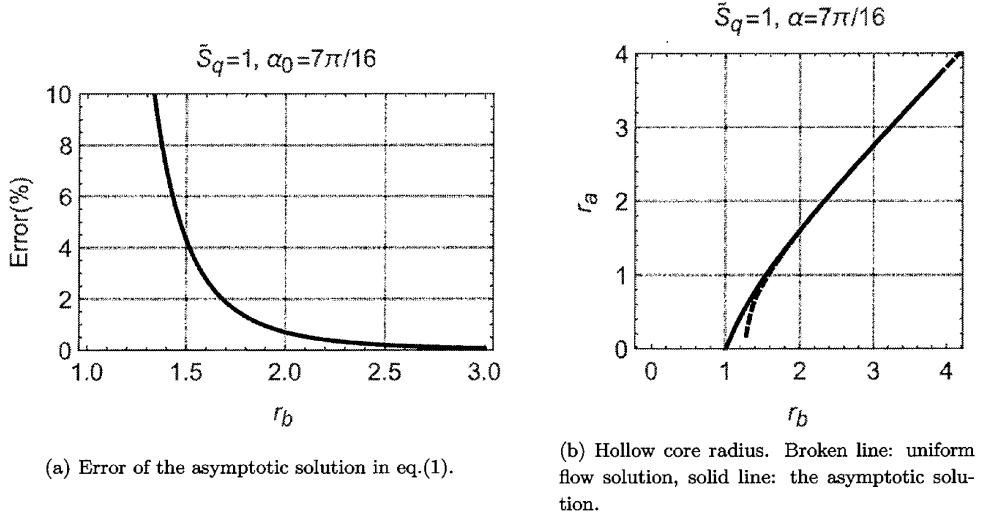


図 4: Error Estimate of the asymptotic solution. Here,  $\alpha = 7\pi/16$ ,  $\tilde{S}_q = 1$ .

となる。また、B-H 方程式 (1) は、上記の変換を適用することで  $\Psi$  の微係数のみを含む方程式

$$\left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Psi} \right)^2 \right\}^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \Psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right) = F \quad (35)$$

に変換される。上式は  $\Lambda$  の  $\Psi$  に関する微係数のみで表されるため、常微分方程式を解くことで未知関数  $\Lambda$  を陽的に求めることができ、

$$\Lambda = r \exp \left[ \int^{\Psi} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Psi} \right)^2 \right\} F d\Psi \right], \quad (36)$$

となる。渦なし流れの場合は  $F = 0$  であり、 $\Lambda = \text{const.} \times r$  が解となる。

さて、自由流線上では流速が 0 となるため

$$v = -\frac{\frac{\partial z}{\partial \Psi}}{r \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Psi} \right)^2 \right\}} = 0, \quad w = \frac{\frac{\partial r}{\partial \Psi}}{r \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Psi} \right)^2 \right\}} = 0 \quad \text{at} \quad \Psi = 0 \quad (37)$$

が成り立つ。ここで、自由流線上で  $\Psi = 0$  とした。式 (37) が成立するためには、境界条件は

$$\frac{\partial z}{\partial \Psi} \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial r}{\partial \Psi} \rightarrow \infty \quad (38)$$

となる。この境界条件の特異性を除去するために、Keller J. J. らは、 $\Psi$  から  $\Psi^{1/2}$  に変数変換を行った。自由流線近傍の級数解を求めることで、彼らの方法を論証する。

自由表面の流線を  $z = z_0(r)$ 、 $\Phi$  の値を  $\Phi_0(r)$  とおくと、自由流線上で流速が 0 となる条件から自由流線近傍の解は、次式で与えられる。

$$\Psi \approx \frac{F|_{\Psi=0}}{2 \left\{ 1 + \left( \frac{\partial z_0}{\partial r} \right)^2 \right\}} (z - z_0)^2, \quad \Phi \approx \Phi_0(r) + \frac{\frac{\partial z_0}{\partial r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}}{\left\{ 1 + \left( \frac{\partial z_0}{\partial r} \right)^2 \right\}} (z - z_0), \quad \Lambda \approx \frac{F|_{\Psi=0}}{\frac{\partial \Phi_0}{\partial r}} (z - z_0) \quad (39)$$

上式から逆関数の微係数を計算すると,  $\Psi \propto (z - z_0)^2$ ,  $\frac{\partial r}{\partial \Psi}, \frac{\partial z}{\partial \Psi} \propto (z - z_0)^{-1}$ ,  $\Lambda \propto (z - z_0)$ ,  $\frac{\partial \Lambda}{\partial \Psi} \propto (z - z_0)^{-1}$  を得る. 以上のことから,

$$r = r(s, \Phi), \quad z = z(s, \Phi), \quad \Lambda = s \lambda(s, \Phi), \quad s = \sqrt{\Psi} \quad (40)$$

とおくと,  $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}$  は有限値となり, 式 (38) の特異性が除去され, 最終的な表示式は次式となる.

$$s \left( \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial s}}{\lambda} - \frac{\frac{\partial r}{\partial s}}{r} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right\} F - 1, \quad (41)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \Phi} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \Phi} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial r}{\partial s} = 0. \quad (42)$$

式 (41) で  $s \rightarrow 0$  の極限を取ると, 自由表面の境界条件

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right\} F - 1 = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \quad (43)$$

が得られる. また, 壁面形状を  $\Gamma(r, z) = 0$  とおくと, 壁面上の境界条件は,

$$\Gamma(r, z) = 0, \quad \text{at} \quad s = s_b \quad (44)$$

となる. 最後に,  $\hat{\lambda}$  には 1 つの境界条件を課することができ, 本研究では

$$\lambda = \lambda_b = \text{const.}, \quad \text{at} \quad s = s_b \quad (45)$$

とする. 以上をまとめると境界条件は, 図 5 で与えられる.

式 (41) は, 第 1 式から  $\lambda$  を境界条件 (45) のもとで解き, 結果を式 (42) に代入すれば,  $r$  と  $z$  に対する方程式となる. この方程式は楕円型であるため,  $s - \Phi$  平面の計算領域境界で 1 つの条件が与えられれば解は決定する.

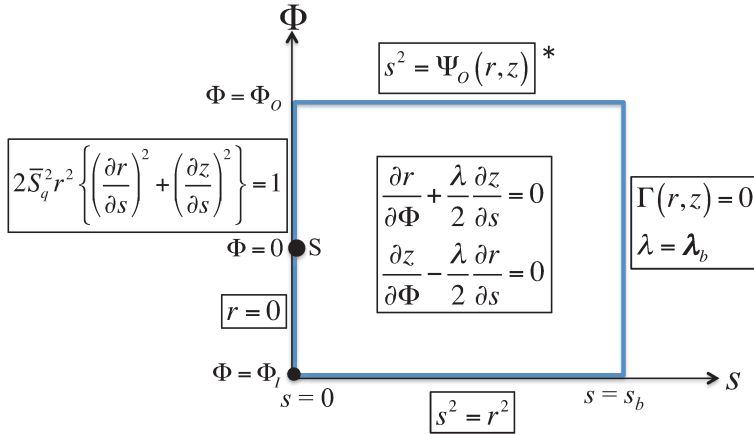


図 5: Boundary conditions in  $s - \Phi$  plane

## 2.2 定常解の安定性—非定常運動への拡張

### 2.2.1 基礎方程式

直交曲線座標系  $(s, \Phi, \theta)$  におけるオイラーの運動方程式を導く。この座標系における線要素ベクトル  $\delta \vec{r}$  は、

$$\delta \vec{r} = h_s \delta s \vec{e}_s + h_\Phi \delta \Phi \vec{e}_\Phi + h_\theta \delta \theta \vec{e}_\theta \quad (46)$$

と置くことができる。ここで、

$$\vec{e}_s = \frac{(\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s})}{h_s}, \quad \vec{e}_\Phi = \frac{(\frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi})}{h_\Phi}, \quad h_s = \left| \left( \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right|, \quad h_\Phi = \left| \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right) \right|, \quad h_\theta = r, \quad (47)$$

$\vec{e}_\theta$  は  $\theta$  方向の単位ベクトル、 $(r, z)$  は式 (41), (42) で定義される  $(s, \Phi)$  の関数である。流体の加速度ベクトル  $\vec{a}$  は、速度ベクトルを  $\vec{u}$  とおくと

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u}, \quad (48)$$

$$\vec{u} = u_s \vec{e}_s + u_\Phi \vec{e}_\Phi + u_\theta \vec{e}_\theta, \quad (49)$$

$$\nabla = \vec{e}_s \frac{\partial}{h_s \partial s} + \vec{e}_\Phi \frac{\partial}{h_\Phi \partial \Phi} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{h_\theta \partial \theta} \quad (50)$$

となる。基底ベクトルの微分を基底ベクトルの線形和で表すことで、 $s, \Phi, \theta$  方向の運動方程式を求めることができる。また、連続の式は

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_s h_\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (h_\Phi h_\theta u_s) + \frac{\partial}{\partial \Phi} (h_\theta h_s u_\Phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_s h_\Phi u_\theta) \right\} = 0 \quad (51)$$

で与えられる。

定常流の安定性を調べるため、解を定常解と変動成分の線形和で表わす。

$$u_s = \epsilon A_s \exp(im\theta - i\omega t), \quad (52)$$

$$u_\Phi = u_{\Phi 0} + \epsilon A_\Phi \exp(im\theta - i\omega t), \quad (53)$$

$$u_\theta = u_{\theta 0} + \epsilon A_\theta \exp(im\theta - i\omega t), \quad (54)$$

$$p = p_0 + \epsilon A_p \exp(im\theta - i\omega t). \quad (55)$$

ここで、 $\epsilon$  は摂動パラメータ、 $m$  は周方向波数、 $\omega$  は各周波数である。上式をオイラーの運動方程式に代入し  $\epsilon$  を 0 とおき整理すると、基本流の方程式

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} (h_s h_\theta u_{\Phi 0}) = 0 \quad (56)$$

$$-\frac{\partial h_\Phi}{h_\Phi \partial s} u_{\Phi 0}^2 - \frac{\partial h_\theta}{h_\theta \partial s} u_{\theta 0}^2 = -\frac{\partial p_0}{\partial s} \quad (57)$$

$$u_{\Phi 0} \frac{\partial u_{\Phi 0}}{\partial \Phi} - \frac{\partial h_\theta}{h_\theta \partial \Phi} u_{\theta 0}^2 = -\frac{\partial p_0}{\partial \Phi} \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} (h_\theta u_{\theta 0}) = 0 \quad (59)$$

となる。ここで、流線上では  $s = \text{const.}$  であるため、 $s$  方向流速  $u_{s0}$  は 0 となることに注意する。未知関数  $u_{\Phi 0}$ ,  $u_{\theta 0}$ ,  $p_0$ , および、 $u_{s0} = 0$  となるための拘束条件に対する方程式である。具体的

には、式 (56), (58) および (59) は、それぞれ質量保存則、ベルヌーイの定理、循環の保存則を与え、 $\Phi$  で積分すると次式が得られる。

$$u_{\Phi 0} = \frac{\tilde{Q}(s)}{h_s h_\theta}, \quad u_{\theta 0} = \frac{\tilde{C}(s)}{h_\theta}, \quad \tilde{H}(s) = p_0 + \frac{1}{2}(u_{\Phi 0}^2 + u_{\theta 0}^2). \quad (60)$$

ここで、 $\tilde{Q}(s)$ ,  $\tilde{C}(s)$ ,  $\tilde{H}(s)$  は積分定数で  $s$  のみの関数であり、上流側の境界値から決定される。dead water 領域の圧力を 0 とおくと、自由境界  $s=0$  が淀み点を通過するとき、 $H(0)=0$  となる。また、 $\Psi$  は流量の次元を持ち、 $\Psi=s^2$  および境界条件より、 $\tilde{Q}=s$  となる。式 (60) を式 (57) に代入すると、 $u_{s0}=0$  を満たす条件、すなわち  $\Phi$  が流れ方向の座標である条件として、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \ln \frac{h_s h_\theta}{\tilde{Q} h_\Phi} \right) = (\tilde{C} \tilde{C}' - \tilde{H}' h_\theta^2) \left( \frac{h_s}{\tilde{Q}} \right)^2, \quad (61)$$

が得られる。本節の直交曲線座標系では、 $s$  は流線に直交する方向の座標であるが、現時点では流れ関数  $\Psi$  の任意関数である。式 (42) にしたがって、直交曲線座標系の直交条件を  $\lambda$  を使って表すと

$$h_\Phi = \frac{\lambda}{2} h_s, \quad (62)$$

であり、さらに、 $h_\theta = r$  および  $\tilde{Q} = s$  とおくと、最終的に式 (61) から式 (41) が導かれる。

式 (52)–(55) をオイラーの運動方程式に代入し  $\epsilon$  の 1 次の項を取り出すことで、変動成分の支配方程式が得られる。変動成分に対する連続式およびオイラーの運動方程式を、それぞれ第 1 行および第 2 行以下に配置し、行列表記すると

$$M_s \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} + M_\Phi \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Phi} + M \mathbf{q} = 0. \quad (63)$$

$$\mathbf{q} \equiv {}^t(A_p, A_s, A_\Phi, A_\theta) \quad (64)$$

ここで、未知関数  $\mathbf{q}$  は、 $s$ - $\Phi$  座標系における摂動流速の振幅、 ${}^t$  は行列の転置を意味する。また、式 (63) の係数行列は、 $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\Phi$  および  $\mathbf{e}_\theta$  方向の運動方程式から決定され、次式で与えられる。

$$M_s = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h_s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho h_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{h_\Phi} & 0 \\ 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho h_\Phi} & 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} \end{bmatrix} \quad (65)$$

また、

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\frac{\partial}{\partial s}(h_\Phi h_\theta)}{h_s h_\Phi h_\theta} & \frac{\frac{\partial}{\partial \Phi}(h_\theta h_s)}{h_s h_\Phi h_\theta} & \frac{i m}{h_\theta} \\ 0 & -i\omega + i \frac{m u_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\frac{\partial}{\partial \Phi} h_s u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} & -\frac{2 \frac{\partial}{\partial s} h_\Phi u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} & -\frac{2 \frac{\partial}{\partial s} h_\theta u_{\theta 0}}{h_s h_\theta} \\ 0 & \frac{\frac{\partial}{\partial s}(h_\Phi u_{\Phi 0})}{h_s h_\Phi} & -i\omega + i \frac{m u_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\frac{\partial}{\partial \Phi} u_{\Phi 0}}{h_\Phi} & -\frac{2 \frac{\partial}{\partial \Phi} h_\theta u_{\theta 0}}{h_s h_\theta} \\ i \frac{m}{\rho h_\theta} & \frac{\frac{\partial}{\partial s}(h_\theta u_{\theta 0})}{h_s h_\theta} & \frac{\frac{\partial}{\partial \Phi}(h_\theta u_{\theta 0})}{h_\Phi h_\theta} & -i\omega + i \frac{m u_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\frac{\partial}{\partial \Phi} u_{\Phi 0}}{h_\Phi h_\theta} \end{bmatrix} \quad (66)$$

となる。上式で

$$u_{\theta 0} = \tilde{u}_{\theta 0} + \frac{h_\theta \omega}{m} \quad (67)$$

とおくと、 $\omega$  を陽に含まない表式となり、 $\omega$  が実数の時は回転座標系における定常流の解を与える。

### 2.2.2 $r = 0$ ( $s = 0, \Phi < 0$ ) における方程式

定常流の流線に直交する曲線座標系では、対称軸近傍の流速を軸・周・放射方向成分で表記することによる制約条件が存在し、さらに対称軸  $s = 0, r = 0$  上でスケールファクターが 0 となるために運動方程式が特異性を持つ。

まず、圧力  $p$  は等方的なため  $\theta$  に依存せず、また  $r = 0$  軸上の軸方向流速  $u_\Phi$  も対称性から  $\theta$  に依存しない。さらに、 $(u_s, u_\theta)$  を対称軸に垂直な面内のデカルト座標系における流速を  $(u, v)$  で表すと、 $u_s = u \cos \theta + v \sin \theta, u_\theta = u \sin \theta + v \cos \theta$  となる。流速  $(u, v)$  は対称軸  $r = 0$  上で一定値となることから、 $u_s$  および  $u_\theta$  は  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の線形関数となる。以上のことから、式 (52) ~ (55) において、擾乱は以下の条件を満足する必要がある。

$$\begin{aligned} A_p &= A_\Phi = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0, \quad \text{for } m = 1, \\ A_s &= A_\theta = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0, \quad \text{for } m = 0, \\ A_p &= A_s = A_\Phi = A_\theta = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0, \quad \text{for } m \neq 0, 1. \end{aligned} \quad (68)$$

つぎに、攪乱方程式 (63) において、 $h_\theta \rightarrow 0, u_{\theta 0} \rightarrow 0, \text{ as } s \rightarrow 0$  とすると、連続式および周方向運動方程式から、それぞれ

$$i m h_s A_\theta + \frac{\partial h_\theta}{\partial s} A_s = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0, \quad (69)$$

$$i m A_p = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0, \quad (70)$$

が得られる。

以上のことから、例えば  $m = 1$  のモードの場合は、対称軸  $r = 0$  上で  $A_p = A_\Phi = 0$  である。このとき、攪乱方程式 (63) の第 3 式は

$$i h_s A_\theta + \frac{\partial h_\theta}{\partial s} A_s = 0 \quad \text{at } s = 0 \text{ \& } \Phi < 0 \quad (71)$$

となる。

### 2.2.3 自由表面の境界条件

擾乱に対する境界条件は 4 つであり、 $\Phi = 0$  における流入条件、 $\Phi \rightarrow \infty$  における流出条件、また、 $s = 1$  における固体壁上の流線条件、最後に、 $s = \epsilon\eta$  における dead water 境界の運動学的および力学的条件である。変数  $s$  および  $\Phi$  における境界条件の数は、それぞれ行列  $\mathbf{M}_s$  および  $\mathbf{M}_\Phi$  の階数に等しい。

まず、dead water 境界の運動学的条件および力学的条件は、

$$\frac{D}{Dt}(s - \epsilon\eta)|_{s=\epsilon\eta}, \quad p|_{s=\epsilon\eta} = 0, \quad (72)$$

である。境界変位が微小な場合を対象とするため、

$$\eta = A_\eta(\Phi) \exp(im\theta - i\omega t), \quad (73)$$

とおくと、式 (72) から、

$$A_s - u_{\Phi 0} \frac{\partial A_\eta}{\partial s} + \left( i\omega - imu_{\theta 0} + \frac{\partial u_{s0}}{\partial s} \right) A_\eta = 0 \quad \text{at } s = 0, \quad (74)$$

$$A_p + \frac{\partial p_0}{\partial s} A_\eta = 0 \quad \text{at } s = 0 \quad (75)$$

となる。上式から  $A_\eta$  を消去し、natural boundary conditions:  $u_{\theta 0}(0, \Phi) = u_{\Phi 0}(0, \Phi) = 0$ , を考慮すると

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} A_s - \left( i\omega + \frac{\partial u_{s0}}{\partial s} \right) A_p = 0 \quad \text{at } s = 0 \quad (76)$$

が得られる。さらに、式 (57) から  $\partial p_0 / \partial s|_{s=0} = 0$  より、境界条件は、

$$A_p = 0 \quad \text{at } s = 0, \quad A_s = 0 \quad \text{at } s = 1 \quad (77)$$

となる。

## 2.2.4 擾乱方程式の解法

擾乱方程式 (63) は主流の流線に沿う座標系で記述されているため、 $s$ -微分を含む、連続式と  $s$  方向の運動方程式、及び、 $s$  微分を含まない  $\Phi\theta$  方向の2本の運動方程式から成る。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial s} (h_\Phi h_\theta A_s) + \frac{\partial}{\partial \Phi} (h_s h_\theta A_\Phi) + i m h_s h_\Phi A_\theta = 0 \quad (78)$$

$$\left( -i\omega + im \frac{u_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial h_s}{\partial \Phi} \frac{u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} \right) A_s + \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} \frac{\partial A_s}{\partial \Phi} - \frac{2 \frac{\partial h_\Phi}{\partial s} u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} A_\Phi - \frac{2 \frac{\partial h_\theta}{\partial s} u_{\theta 0}}{h_s h_\theta} A_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_p}{h_s \partial s} = 0 \quad (79)$$

$$\left( -i\omega + i \frac{mu_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial u_{\Phi 0}}{\partial \Phi} \frac{1}{h_\Phi} \right) A_\Phi + \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} \frac{\partial A_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial}{\partial s} (h_\Phi u_{\Phi 0}) A_s - \frac{2 \frac{\partial h_\theta}{\partial \Phi} u_{\theta 0}}{h_\Phi h_\theta} A_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_p}{h_\Phi \partial \Phi} = 0 \quad (80)$$

$$\left( -i\omega + i \frac{mu_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial h_\theta}{\partial \Phi} \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi h_\theta} \right) A_\theta + \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \Phi} + \frac{\partial}{\partial s} (h_\theta u_{\theta 0}) A_s + i \frac{m}{\rho h_\theta} A_p = 0 \quad (81)$$

となる。ここで、式 (81) では、角運動量の保存則 (59) から  $A_\Phi$  の項は消去されている。以上4本の方程式は、平行流の線形安定性理論で現れる基礎式と類似している。すなわち、主流に横断方向の未知関数が  $A_s, A_p$  で、これらの支配方程式は式 (78), (79) である。一方で、未知関数  $A_\Phi, A_\theta$  は、式 (80), (81) から  $A_s, A_p$  の関数であり、これらの方程式は  $\Phi$  微分のみを含むため、 $\Phi$  方向の境界条件のみから決定される。具体的には、式 (80) から  $A_\theta$  を代数的に求め、式 (81) に代入することで、 $A_\Phi$  の  $\Phi$  に関する2階の微分方程式が得られる。この方程式の  $\Phi$  微分を離散化し代数的に解くと

$$L[A_\Phi] = M_{\Phi s} L[A_s] + M_{\Phi p} L[A_p], \quad (82)$$

$$L[A_\theta] = M_{\theta \Phi} L[A_\Phi] + M_{\theta s} L[A_s] + M_{\theta p} L[A_p] \quad (83)$$

となる。ここで、 $L[f]$  は、離散化後の節点における関数  $f$  の値を表す列ベクトルであり、 $s$  の関数である。次に、式 (78), (79) も変数  $\Phi$  に関して離散化し、式 (82) 及び (83) を代入すると、 $L[A_s], L[A_p]$  に関する  $s$  の常微分方程式系

$$M_{ss} \frac{dL[A_s]}{ds} + M_{s1} L[A_s] + M_{p1} L[A_p] = 0, \quad (84)$$

$$M_{ps} \frac{dL[A_p]}{ds} + M_{s2} L[A_s] + M_{p2} L[A_p] = 0 \quad (85)$$

が得られる。上式から  $L[A_s]$  を消去すると、 $L[A_p]$  の二階常微分方程式となり、Rayleigh 方程式と同様な方程式が導かれる。

### 2.2.5 流れ方向の境界条件

前節で導いた Rayleigh の方程式においては、中立安定となる場合には流れの領域内に特異点を持つこと、また、不安定固有値を持つ固有関数は Orr-Sommerfelds 方程式の解に漸近することが示されている。非一様流の場合に、同様のことが成立するかどうかは不明であるが、得られた固有関数が流れの領域内で滑らかな関数であれば、物理的に意味のある解が得られたと考えることができる。

また、非一様流の線形安定問題をより体系的に扱えるように、非一様流領域の遠方では主流が一樣となる場合を取り扱う。本渦崩壊の問題では、 $\Phi \rightarrow -\infty$  では固体渦、 $\Phi \rightarrow \infty$  では準平行流となる。この場合には、無限遠方で擾乱方程式の解析解を求めることができるため、境界条件を厳密に指定することができる。

流出領域  $\Phi \rightarrow \infty$  における擾乱のオーダーは、

$$A_s = \sqrt{\Phi} \tilde{A}_s, A_\Phi = \frac{2^{3/4} i S_q^{3/2} \sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2} k_\ell S_q s - \omega} \Phi \tilde{A}_s, A_\theta = \frac{2 i \sqrt{2} S_q^2 s}{\sqrt{2} k_\ell S_q s - \omega} \sqrt{\Phi} \tilde{A}_s, A_p = \rho \tilde{A}_p \quad (86)$$

となる。ここで、 $\tilde{A}$  の項のオーダーは 1、 $k_\ell$  は  $\Phi$  方向の距離  $\ell$  における波数で

$$k_\ell = 2^{5/4} S_q^{1/2} \sqrt{\cos \alpha} \Phi^{1/2} k_\Phi, \quad (87)$$

で与えられている。すると、

$$(\omega - \sqrt{2} k_\ell S_q s) \frac{d\tilde{A}_s}{ds} + \sqrt{2} k_\ell S_q \tilde{A}_s = 0, \quad (88)$$

$$i 2^{1/4} \sqrt{S_q \cos \alpha} \frac{d\tilde{A}_p}{ds} + (\omega - \sqrt{2} k_\ell S_q s) \tilde{A}_s = 0, \quad (89)$$

となる。上式を境界条件  $A_p|_{s=0} = 0, A_s|_{s=1} = 0$  の下で解くと、

$$\omega = 2^{7/4} S_q^{3/2} \sqrt{\cos \alpha} \Phi^{1/2} k_\Phi, \quad A_s = \sqrt{2} k_\ell S_q (s-1) \sqrt{\Phi} \quad (90)$$

が得られる。結果的に、式 (88) は  $s=1$  に特異点を持つが、固有関数は滑らかな解を与える。

一方で、固体渦領域の擾乱方程式は、

$$\tilde{\omega}^2 s \frac{d}{ds} \left( s \frac{dA_p}{ds} \right) + \{ -m^2 \tilde{\omega}^2 + 4k_\Phi^2 (4S_q^2 - \tilde{\omega}^2) s^2 \} A_p = 0 \quad (91)$$

$$A_s = \frac{-2imS_q}{(4S_q^2 - \tilde{\omega}^2)s} A_p + \frac{i\tilde{\omega}}{4S_q^2 - \tilde{\omega}^2} \frac{dA_p}{ds} \quad (92)$$

$$\tilde{\omega} \equiv \omega - (2k_\Phi + mS_q) \quad (93)$$

となる。境界条件  $A_p|_{s=0} = 0, A_s|_{s=1} = 0$  の下で解くと、固有値方程式

$$\beta \tilde{\omega} \left( J_{m-1}(\beta) - J_{m+1}(\beta) \right) - 4mS_q J_m(\beta) = 0, \quad \beta = 2k_\Phi \sqrt{\frac{4S_q^2}{\tilde{\omega}^2} - 1} \quad (94)$$

が得られる。上式で、 $\Phi$  方向の波数  $k_\Phi$  は  $z$  方向の波数  $k_z$  と  $k_z = 2k_\Phi$  の関係にあることに注意する。

以上のことから、流入流出側の境界条件は、固有関数が  $\exp(i k_\Phi \Phi)$  に比例するとして、与えることができる。ここで、 $k_\Phi$  は  $\omega$  の関数であり、流入側の固有値  $k_\Phi$  は多重根を持つため、同じ分岐に属する根を指定して安定解析を行う。

### 3 まとめ

非一様流の線形安定性を調べる手法について議論した. 特に, 非粘性流体では, 内部摩擦層の存在が問題を複雑にするため, 本研究では不安定固有値の存在を仮定した. 今後は, 非一様流の線形安定性の計算法を整理する予定である [11].

### 参考文献

- [1] Benjamin, T. B., Theory of the vortex breakdown phenomenon, J. Fluid Mech., vol. 14, pp. 593-629, 1962.
- [2] Keller and Egli, Force- and loss-free transitions between flow states, ZAMP, v. 35, pp. 854-889, 1985.
- [3] Keller and Egli, Vortex breakdown as a fundamental element of vortex dynamics, ZAMP, v. 39, pp. 404-440, 1988.
- [4] Buntine, J. D. and P. G. Saffman, Inviscid swirling flows and vortex breakdown, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 449, pp. 139-153, 1995.
- [5] Kuigin, Okulov, Phys. Fluids, v. 10, n. 3, pp. 607-614, 1998.
- [6] Alekseenko, Kuibin, Okulov, Shtork, Helical vortices in swirl flow, J. Fluid Mech., v. 382, pp. 195-243, 1999.
- [7] Lucca-Negro, O. and T. O' Doherty, Vortex breakdown: a review, Progress in Energy and Combustion Science, vol. 27, pp. 431-481, 2001.
- [8] 山田, 坂入, 金子, 京藤, 空気吸込み渦の崩壊に伴う微細気泡の生成, 日本流体力学学会年会, AM05-24-002, 2005.
- [9] 京藤, 塩田, コアンダ効果により誘起される渦崩壊と渦笛, 日本流体力学学会年会, AM14-001, 2014.
- [10] Litvinov et. al., Experimental study and analytical reconstruction of precessing vortex in a tangential swirler, Int. J. Heat Fluid Flow, v. 42, pp. 251-264, 2013.
- [11] 京藤, 塩田, 気液二相スワール流れ, ながれ, 35 (5), 日本流体力学学会, pp. 347-352, 2016.